Løsningforslag til oppgavesett VI, "Feltteori og vektoranalyse" (2018/2021), side 213.

av Bjørn Gjevik, 9. mai 2021

Oppgave 1.

I et plane kartesiske koordinater (x, y) er et divergens- og virvelfritt vektorfelt gitt ved :

$$\boldsymbol{v} = v_x \, \boldsymbol{i} + v_y \, \boldsymbol{j}$$

a) Det eksisterer en potensialfunksjon $\phi(x, y)$ slik at $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ fordi $\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times \nabla\phi \equiv 0$. Komponentene av vektoren $\boldsymbol{v}$ er bestemt ved

$$\begin{aligned} v_x &= \frac{\partial\phi}{\partial x} \\ v_y &= \frac{\partial\phi}{\partial y} \end{aligned}$$

når potensialfunksjonen ϕ er kjent. Det forutsettes at funksjonen er deriverbar.

Det kan også innføres en strømfunksjon (feltfunksjon) definert ved

$$\begin{aligned} v_x &= -\frac{\partial\psi}{\partial y} \\ v_y &= \frac{\partial\psi}{\partial x} \end{aligned}$$

Det er da forutsatt at $\psi(x, y)$ er en deriverbar funksjon av x og y. Ved denne definisjonen er

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\Big(- \frac{\partial\psi}{\partial y}\Big) + \frac{\partial}{\partial y}\Big(\frac{\partial\psi}{\partial x}\Big) = -\frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y\partial x} = 0$$

Strømvektoren kan også skrives

$$\boldsymbol{v} = \nabla \times (-\psi\boldsymbol{k})$$

hvor $\boldsymbol{k}$ er en enhetsvektor normalt xy-planet. Denne likningen viser at vektoren $-\psi(x, y)\boldsymbol{k}$ tilsvarer et vektorpotensialet slik det er definert ved Helmholtz teorem i likning (4.28), side 75 i boken.

c) Gradientvektorene $\nabla\phi$ og $\nabla\psi$ står normalt på ekviskalarlinjene for h.h.v. ϕ og ψ. Nå er

$$\nabla\phi \cdot \nabla\psi = \Big(\frac{\partial\phi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\boldsymbol{j}\Big) \cdot \Big(\frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{j}\,\Big) = \big(v_x \, \boldsymbol{i} + v_y \, \boldsymbol{j}\big) \cdot \big(v_y \, \boldsymbol{i} - v_x \, \boldsymbol{j}\big) = \big(v_x v_y - v_y v_x\big) = 0$$

Gradientvektorene står altså normalt på hverandre og det viser at ekviskalarlinjene også står normalt på hverandre. Se også figur 1 i losningsforslag til oppgavesett V.

Oppgave 2.

Gitt to vektorfelt fra potensialteori h.h.v. med strømfunksjoner (feltfunksjoner):

$$\begin{aligned} \psi_1(x, y) &= Uy \\ \psi_2(x, y) &= -\frac{a^2U\,y}{x^2 + y^2} \end{aligned}$$

a) De to feltene representerer henholdsvis feltet for en uniform rettlinjet strøm i negativ x-retning og en dipol i origo med dipolakse i x-retning. Strømlinjene for det første feltet er gitt ved

$$\psi_1 = -Uy = \psi_o$$

i.e. rette linjer parallelt med x-aksen

$$y = C, \quad C = -\frac{\psi_o}{U}$$

og for det andre

$$\psi_2 = -\frac{a^2 U\, y}{x^2 + y^2} = \psi_o$$

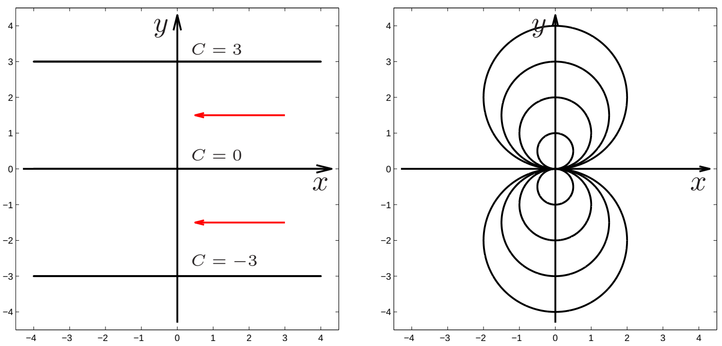
Dette kan omskrives

$$-2Ry = x^2 + y^2$$

hvor $R = \frac{a^2 U}{2\psi_o}$. Videre til

$$x^2 + (y + R)^2 = R^2$$

Dette er likningen for sirkler med radius R og sentrum på y-aksen for $y = \pm R$ (fortegn avhenger av valgt fortegn på ψ_o. Alle sirklene tangerer derfor x-aksen i origo. Strømlinjene til de to feltene er skisser i fig. 1.



Figur 1: *Strømlinjer for feltet ψ_1 til venstre og for feltet ψ_2 til høyre med $R = 0,5 - 2,0$.*

b) To eller flere potensialfelt kan adderes og det gir et nytt divergens- og virvelfritt potensialfelt. La $\boldsymbol{v}_1$ og $\boldsymbol{v}_2$ være divergensfrie og virvelfrie felt i.e.

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{v}_1 &= 0 \\ \nabla \cdot \boldsymbol{v}_2 &= 0 \\ \nabla \times \boldsymbol{v}_2 &= 0 \end{aligned}$$

Da er summen av de to feltene $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ også divergensfritt og virvelfritt

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 + \nabla \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0 + 0 = 0$$

og

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \nabla \times \boldsymbol{v}_1 + \nabla \times \boldsymbol{v}_2 = 0 + 0 = 0$$

På tilsvarende måte kan strømfunksjonene for de to feltene h.h.v. ψ_1 og ψ_2 adderes å gi strømfunksjonen for ψ for felt $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$. Det følger av

$$\boldsymbol{v} = -\nabla \times (\psi \boldsymbol{k}), \quad \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2 = -\nabla(\psi_1 \boldsymbol{k}) - \nabla(\psi_2 \boldsymbol{k})$$

hvor $\boldsymbol{k}$ er en enhetsvektor normalt kordinatplanet (xy). Det er viktig å være klar over at grunnen til at feltene kan adderes (superponeres) på denne måten er at operatorene $\nabla\cdot$ og $\nabla\times$ er *lineære operatorer* dvs. det inngår ikke ledd med produkter av de variable i operatorene.

c) Innfører polarkoordinater (r, θ) med $x = r\cos\theta$, $y = r\sin\theta$. Strømfunksjonen i polarkoordinater er:

$$\psi(r,\theta) = Ur\sin\theta\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right]$$

og likningen for strømlinjene er

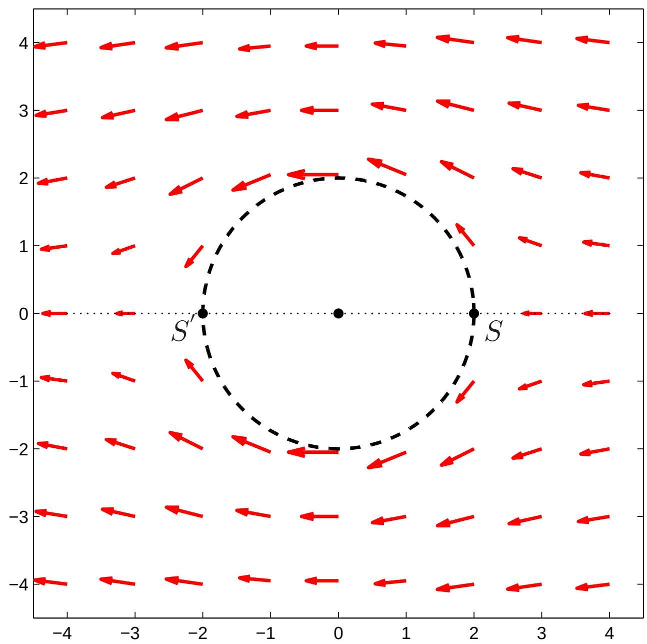
$$Ur\sin\theta\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] = \psi_o$$

Strømlinjen $\psi_o = 0$ er gitt ved $\sin\theta = 0$ og $r = a$ dvs x-aksen og en sirkel med sentrum i origo og radius $r = a$.

d) Strømkomponentene i polarkoordinater er:

$$\begin{aligned} v_r &= -\frac{\partial\psi}{r\partial\theta} = -U\cos\theta\left[1 - \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \\ v_\theta &= \frac{\partial\psi}{\partial r} = U\sin\theta\left[1 + \left(\frac{a}{r}\right)^2\right] \end{aligned}$$

Strømfeltet er skissert i fig. 2.

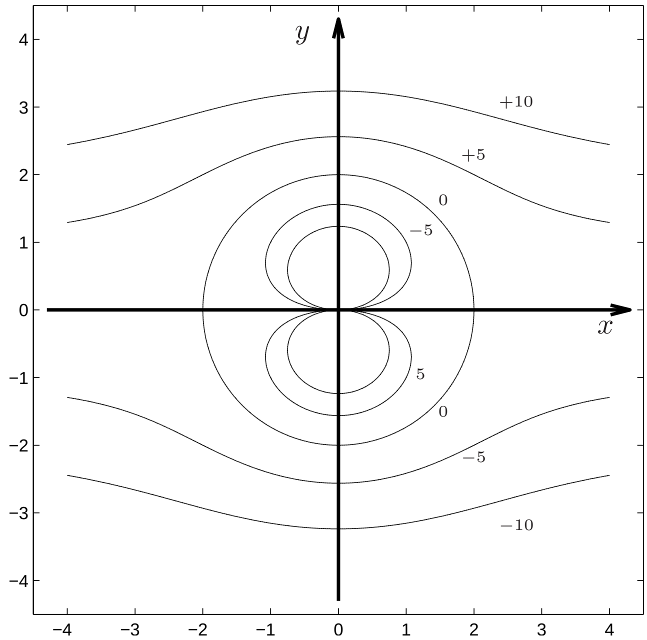


Figur 2: *Strømvektorer for feltet ψ med $U = 5$, $a = 2.0$. Strømlinjen $\psi_o = 0$ består av sirkelen markert med stiplete linje og x-aksen med svak stipling.*

Feltet (for $r > a$) representer uniform strøm omkring en sylinder med akse normalt xy-planet. I punktet S på oppstrømsiden $(r = a, \theta = 0)$ er det ingen strøm $(v_r = 0, v_\theta = 0)$. Dette er et *stagnasjonspunkt*. Tilsvarende forhold er det i symmetripunktet S' på baksiden (lesiden). I punktene på siden av sylinderen $(r = a, \theta = \pm\pi/2)$ er strømhastigheten $2U$, det dobbelte av fristrømshastigheten. Dersom friksjon i væsken har betydning vil den modifisere strømmen i et tynt sjikt nær sylinderflaten og det kan også oppstå kjølvannstrømning på baksiden (lesiden), eventuelt med dannelse av virvler. På oppstrømsiden (losiden) vil feltet som er beregnet her representere en god tilnærmelse til de virkelige forhold selv om det er friksjon i væsken.

En elektro-magnetisk analogi: Det er viktig å være klar over at også disse feltene kan brukes i elektro-magnetisk teori. Det første feltet ψ_1 tilsvarer et uniformt magnetfelt mellom to store og kraftige magnetpoler, eller magnetfeltet i sentrum av et system av store sirkulære spoler som leder elektrisk strøm (Helmholtz coils). Det andre (dipolfeltet, ψ_2) tilsvarer magnetfeltet omkring en stavmagnet i origo og orientert med akse langs x-aksen. Superposisjonen av disse to feltene viser hvordan et uniformt magnetfelt avbøyes av feltet fra en stavmagnet, her er det viktig at strukturen i feltet for $r < a$ også blir tatt med. For væske-strømmen forbi en sylinder var bare delen av feltet for $r > a$ av betydning. Feltlinjer tilsvarende feltet $\psi(x, y)$ er plottet i fig. 3. Innenfor sirkelen $r = a$ dominerer dipolfeltet fra stavmagneten, utenfor sirkelen er det uniforme bakgrunnsfeltet strekest.

Et liknende, men noe mer komplisert tre-dimensjonalt fenomen er solvind (fig. 1 i boken) hvor elektrisk ladede partikler fra solen avbøyes av magnetfeltet rundt jorden som har en tre-dimensjonal (kulesymmetrisk) dipolstruktur (fig. 9.14 i boken).



Figur 3: *Feltlinjer for feltet $\psi(x, y) = \psi_o$ med $U = 5$, $a = 2$. Stavmagneten tenkes ligge i origo med retning langs x-aksen. Verdien av konstanten ψ_o er satt på feltlinjene.*

Oppgave 3.

Gitt formelen for varmestrøm (varmefluks):

$$\boldsymbol{H} = \rho c(T - T_o)\boldsymbol{v} - k\nabla T$$

a) Størrelsene som inngår i denne formelen (vektoriell) med enheter er:

Størrelse	Symbol	SI-enhet
Varmefluks	$\boldsymbol{H}$	$J/m^2\,s = W/m^2$
Tetthet	ρ	kg/m^3
Spesifik varmekapasitet	c	$J/kg\,K$
Strømhastighet	$\boldsymbol{v}$	m/s
Varmeledningstallet	k	$W/m\,K$
Temperatur (i absolutt skala)	T	K (Kelvin)
Referansetemperatur	T_o	K

Første ledd (høyre side) i formelen er varmefluks med strømmen (flyten) i fluidet, også kalt *konvektiv* varmestrøm. Andre leddet er varmefluks ved ledning i fluid eller fast stoff, også kalt *konduktiv* varmestrøm.

Alle tre ledd i formelen har dimensjon (enhet) W/m^2 så den er dimensjonsmessig korrekt.

b) Den totale varmefluksen gjennom en flate σ er

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma$$

hvor $\boldsymbol{n}$ er enhetsvektoren til flateelementet $d\sigma$ som flaten σ er inndelt i. Enheten for Q er W.

c) En rektangulær flate med sidekanter a og b i xy-planet har konstant flatenormal $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$ og flateelement $d\sigma = dx\,dy$. Enhetsvektorene i x og y- retning er h.h.v. $\boldsymbol{i}$ og $\boldsymbol{j}$. Med temperatur $T(z) = T_o(1 - \beta z)$ og strømhastighet $\boldsymbol{v} = \alpha z \boldsymbol{i}$ blir varmefluksen per flateenhet

$$\boldsymbol{H} = \rho c(T - T_o)\boldsymbol{v} - k\nabla T = \rho c T_o \beta z \alpha z \, \boldsymbol{i} + k T_o \beta \, \boldsymbol{k}$$

Siden den konvektive varmefluksen er rettet i x-retning er det bare konduktive varmefluksen gjennom rektanglet. Nå er $\boldsymbol{i} \cdot \boldsymbol{k} = 0$ og $\boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k} = 1$ og det gir for varmestrømmen gjennom rektanglet:

$$Q_z = \int_\sigma \boldsymbol{H} \cdot \boldsymbol{k} \, d\sigma = \int_0^a \int_0^b k T_o \beta \, dx \, dy = k T_o \beta a b$$

siden integranden er konstant over flaten. Enheten for Q_z er W (Watt).