Løsningforslag til oppgavesett IV, "Feltteori og vektoranalyse" (2018/2021), side 209.

av Bjørn Gjevik, 18. april 2021

Oppgave 1.

Gitt skalarfunksjonen:

$$\beta(x,y) = A\ln{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

a) Likningen for ekviskalarlinjene er:

$$\beta(x,y) = A\ln{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = A\frac{1}{2}\ln{(x^2+y^2)} = \beta_o$$

Det gir:

$$\ln{(x^2+y^2)} = \frac{2\beta_o}{A}$$

og ved å bruke leddene i likningen som argument i eksponentsialfunksjonen:

$$\exp\big(\ln{(x^2+y^2)}\big) = \exp\big(\frac{2\beta_o}{A}\big)$$

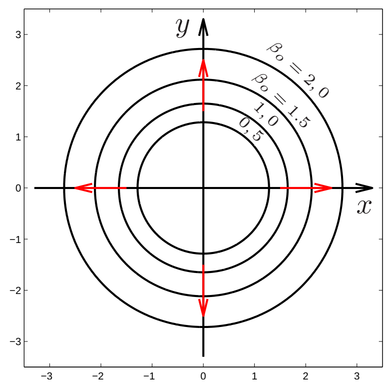
Derav:

$$x^2+y^2 = R^2$$

hvor

$$R = \exp\big(\frac{\beta_o}{A}\big)$$

Det viser at ekviskalarlinjene er sirkler med sentrum i origo og radius R (fig. 1).



Figur 1: *Skisse av ekviskalarlinjer (med $A = 2$) og noen gradientvektorer (rød) på koordinataksene (med skalering 1,0) (oppgv. 1b).*

b) Setter

$$\beta(x,y) = A\ln r$$

hvor

$$r(x,y) = (x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$

Når

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{1}{2}(x^2+y^2)^{-\frac{1}{2}}2x = \frac{x}{r}$$

og med tilsvarende uttrykk for derivasjon av $r(x,y)$ m.h.p. y. Det gir

$$\frac{\partial \beta}{\partial x} = \frac{\partial \beta}{\partial r}\frac{\partial r}{\partial x} = A\frac{x}{r^2}$$

og med tilsvarende uttrykk for derivasjon m.h.p. y:

$$\frac{\partial \beta}{\partial y} = A\frac{y}{r^2}$$

Gradientvektoren i kartesiske koordinater er:

$$\nabla \beta = \frac{\partial \beta}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \beta}{\partial y}\boldsymbol{j} = A\big(\frac{x}{r^2}\,\boldsymbol{i} + \frac{y}{r^2}\,\boldsymbol{j}\big) = \frac{A}{x^2+y^2}(x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j})$$

c) Innfører plane polarkoordinater (r, θ) med enhetsvektorer

$$\begin{aligned} \boldsymbol{i}_r &= \cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{i}_\theta &= -\sin\theta\,\boldsymbol{i} + \cos\theta\,\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

Relasjonene mellom kartesiske koordinater og polarkoordinater:

$$\begin{aligned} x &= r\cos\theta \\ y &= r\sin\theta \end{aligned}$$

Setter en inn i det oppgitte uttrykket for skalarfunksjonen får en:

$$\beta(r) = A\ln\big(x^2+y^2\big)^{\frac{1}{2}} = A\ln\big(r^2\cos^2\theta + r^2\sin^2\theta\big)^{\frac{1}{2}} = A\ln r$$

Gradientvektoren i polarkoordinater:

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial r}\,\boldsymbol{i}_r + \frac{\partial\beta}{r\partial\theta}\,\boldsymbol{i}_\theta = \frac{A}{r}\,\boldsymbol{i}_r$$

Samme resultat får en ved innsetning i uttrykket for $\nabla\beta$ i kartesiske koordinater:

$$\nabla\beta = \frac{A}{x^2+y^2}\big(x\,\boldsymbol{i} + y\,\boldsymbol{j}\big) = \frac{A}{r^2}r\big(\cos\theta\,\boldsymbol{i} + \sin\theta\,\boldsymbol{j}\big) = \frac{A}{r}\,\boldsymbol{i}_r$$

d) Vektoren $\boldsymbol{v} = -\nabla\times(\beta\,\boldsymbol{k})$. I dette uttrykket er vektoren $(-\beta\,\boldsymbol{k})$ et vektorpotensial slik som definert i Helmholtz teorem (side 75). Nå er:

$$\boldsymbol{v} = -\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ 0 & 0 & \beta \end{vmatrix} = -\frac{\partial\beta}{\partial y}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\,\boldsymbol{j}$$

Derved er:

$$\boldsymbol{v}\cdot\nabla\beta = \big(-\frac{\partial\beta}{\partial y}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\,\boldsymbol{j}\big)\cdot\big(\frac{\partial\beta}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\,\boldsymbol{j}\big) = -\frac{\partial\beta}{\partial y}\frac{\partial\beta}{\partial x} + \frac{\partial\beta}{\partial x}\frac{\partial\beta}{\partial y} = 0$$

Altså står vektorene $\boldsymbol{v}$ og $\nabla\beta$ normalt på hverandre. Divergensen til vektoren $\boldsymbol{v}$ er :

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}\big(-\frac{\partial\beta}{\partial y}\big) + \frac{\partial}{\partial y}\big(\frac{\partial\beta}{\partial x}\big) = -\frac{\partial^2\beta}{\partial x\partial y} + \frac{\partial^2\beta}{\partial y\partial x} = 0$$

Oppgave 2.

Gitt to vektorfelt i xy-planet:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{v}_1 &= x\,\boldsymbol{i} - y\,\boldsymbol{j} \\ \boldsymbol{v}_2 &= xy\,\boldsymbol{i} + \frac{1}{2}x^2\,\boldsymbol{j} \end{aligned}$$

a) Det gir

$$
\begin{aligned}
\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 &= \frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(-y) = 1 - 1 = 0 \\
\nabla \cdot \boldsymbol{v}_2 &= \frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{1}{2}x^2) = y \neq 0
\end{aligned}
$$

og

$$
\nabla \times \boldsymbol{v}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_{1x} & v_{1y} & 0 \end{vmatrix} = (\frac{\partial v_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{1x}}{\partial y})\boldsymbol{k} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x)\right]\boldsymbol{k} = 0
$$

$$
\nabla \times \boldsymbol{v}_2 = (\frac{\partial v_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{2x}}{\partial y})\boldsymbol{k} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(\frac{x^2}{2}) - \frac{\partial}{\partial y}(xy)\right]\boldsymbol{k} = (x - x)\boldsymbol{k} = 0
$$

b) For feltet $\boldsymbol{v}_1$ som er både divergens og virvelfritt eksisterer det både et hastighetspotensiale (potensialfunksjon) og en strømfunksjon (feltfunksjon). Strømfunksjonen ψ for feltet er bestemt ved:

$$
-\frac{\partial \psi}{\partial y} = x \quad \frac{\partial \psi}{\partial x} = -y
$$

Integreres de to likningene får en i begge tilfelle.

$$
\psi(x, y) = -xy
$$

Hastighetspotensialet (potensialfunksjonen) ϕ for feltet er bestemt ved:

$$
\frac{\partial \phi}{\partial x} = x \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = -y
$$

Integreres de to likningene får en h.h.v. fra den første og den andre:

$$
\begin{aligned}
\phi(x, y) &= \frac{1}{2}x^2 + f_y(y) \\
\phi(x, y) &= -\frac{1}{2}y^2 + f_x(x)
\end{aligned}
$$

hvor $f_x(x)$ og $f_y(y)$ er vilkårlige integrasjonsfunksjoner. For å få et entydig utttrykk for ϕ bestemmes integrasjonsfunksjonene til $f_x(x) = x^2/2$ og $f_y(y) = -y^2/2$. Det gir:

$$
\phi(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 - y^2\right)
$$

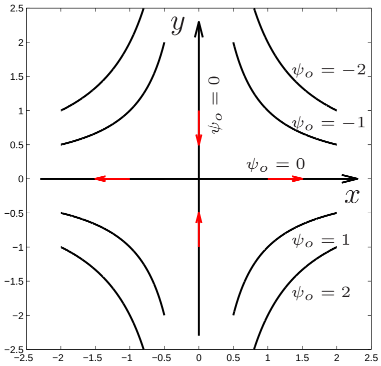
For feltet $\boldsymbol{v}_2$ som er virvelfritt, men ikke divergensfritt eksisterer det bare et hastighetspotensiale (potensialfunksjon) ϕ_2. Den bestemmes slik:

$$
\frac{\partial \phi_2}{\partial x} = xy, \quad \frac{\partial \phi_2}{\partial y} = \frac{1}{2}x^2
$$

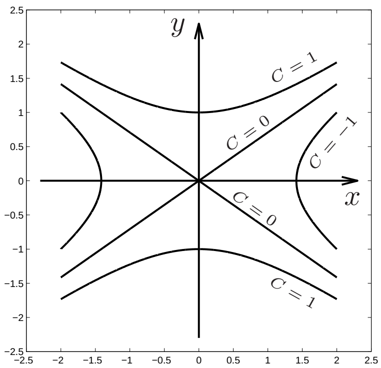
Integrasjon av de to likningene gir samme uttrykk for hastighetspotensialet:

$$
\phi_2(x, y) = \frac{1}{2}x^2 y
$$

Her er det ikke nødvendig å tilpasse integrasjonsfunksjoner for å få et entydig uttrykk.



Figur 2: *Skisse av strømlinjer (feltlinjer) og noen strømvektorer på koordinataksene (med skalering 0,9) for feltet* $\boldsymbol{v}_1$*.*



Figur 3: *Skisse av strømlinjene (feltlinjene) for feltet* $\boldsymbol{v}_2$*.*

c) Likningen for strømlinjene for feltet $\boldsymbol{v}_1$ er gitt ved:

$$\psi(x, y) = -xy = \psi_o, \quad y = -\frac{\psi_o}{x} \quad x \neq 0$$

Strømlinjene er skissert i fig. 2.

d) For feltet $\boldsymbol{v}_2$ er $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_2 \neq 0$. Det eksisterer derfor ikke en strømfunksjon, men strømlinjene kan likevel finnes.

Et buelement langs strømlinjene skrives

$$d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j}$$

Siden strømvektoren $\boldsymbol{v}_2$ er tangent til strømlinjene er

$$\boldsymbol{v}_2 \times d\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ xy & \frac{1}{2}x^2 & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = \left(xy\,dy - \frac{1}{2}x^2\,dx\right)\boldsymbol{k} = 0$$

Det gir:

$$xy\,dy = \frac{1}{2}x^2\,dx$$

Forkorter med x, integrerer og får

$$y^2 = \frac{1}{2}x^2 + C$$

hvor C er en integrasjonskonstant. Likningen for strømlinjene blir:

$$y = \pm\sqrt{\frac{1}{2}x^2 + C}$$

Dessuten er y-aksen, $x = 0$, en strømlinje. Med konstanten $C = 0$ får en asymptotene $y = \pm\frac{x}{\sqrt{2}}$ for strømlinjene som er skisser på fig. 3.

Oppgave 3.

Gitt et tre-dimensjonalt vektorfelt $\boldsymbol{A}$

a) Gauss'sats (divergenstreoremet) er:

$$\int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, d\tau = \int_\sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma$$

Det uttrykker at volumintegralet av divergensen til vektorfeltet ($\boldsymbol{A}$) over et volum τ med begrensningsflate σ er lik flateintegralet av vektorfluksen ($\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}$, per flateenhet) gjennom flaten. Normalvektoren til flaten er $\boldsymbol{n}$ og $d\sigma$ er et flateelement i flaten.

b) Gitt vektoren i kulekoordinater med en komponent bare i radiell retning:

$$\boldsymbol{A} = A_r \boldsymbol{i}_r \quad A_r = \frac{1}{3} C r$$

hvor $\boldsymbol{i}_r$ er enhetsvektoren i r-retningen og C er en konstant. Divergensen til vektoren er:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(\frac{C}{3} r^3) = \frac{1}{r^2}\frac{C}{3} 3r^2 = C$$

1) Beregner vektorfluksen gjennom en kuleflate σ med radius $r = a$ og sentrum i origo ved å bruke Gauss' sats:

$$\int_\sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, d\tau = \int_\tau C\, d\tau = C\tau$$

hvor $\tau = \frac{4}{3}\pi a^3$ er volumet som er begrenset av flaten.

2) Beregner volumfluksen gjennom kuleflaten direkte:

$$\int_\sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\sigma A_r \boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\sigma A_r \boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{i}_r\, d\sigma = \int_\sigma \frac{Ca}{3}\, d\sigma = \frac{Ca}{3}\int_\sigma d\sigma = \frac{Ca}{3} 4\pi a^2 = \frac{4}{3}\pi a^3 C$$

Det er samme resultat som funnet under punkt 1).

c) Setter nå

$$A_r = \frac{C}{r^2}, \quad r \neq 0$$

Divergensen til feltet er:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 A_r) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2 \frac{C}{r^2}) = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(C) = 0$$

hvor det singulære punktet i origo $r = 0$ er ekskludert.

1) Beregner vektorfluksen gjennom kuleflate σ med radius $r = a$ direkte:

$$\int_\sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\sigma A_r\, d\sigma = \int_\sigma \frac{C}{a^2}\, d\sigma = \frac{C}{a^2}\int_\sigma d\sigma = \frac{C}{a^2} 4\pi a^2 = 4\pi C$$

2) Beregner saa vektorfluksen ved å bruke Gauss's sats. Siden $\nabla \boldsymbol{A} = 0$, bortsett fra i origo som er et singulært punkt for feltet, gir det:

$$\int_\sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, d\tau = 0$$

En kan derfor ikke bruke Gauss' sats i den enkle formen i punkt a) når begrensningsflate omslutter det singulære punktet i origo. For en begrensningsflate som ikke i omslutter origo vil Gauss' sats derimot gi korrekt svar for vektorfluksen gjennom flaten.

Oppgave 4.

Gitt to potensialfelt med strømfunksjoner (feltfunksjoner)

$$\psi_1 = Uy$$
$$\psi_2 = -aU\theta$$

hvor U og a er positive konstanter og y er den kartesiske koordinaten i y-retning.

a) Potensialfelt er per definisjon divergens- og virvelfrie felt.

b) For feltet ψ_1 er komponentene av strømvektoren langs x og y retningene er henholdsvis:

$$v_x = -\frac{\partial \psi_1}{\partial y} = -U$$
$$v_y = \frac{\partial \psi_1}{\partial x} = 0$$

Dette feltet representerer altså en uniform rettlinjet strøm i negativ x-retning.
For feltet ψ_2 lønner det seg å bruke polarkoordinater (r, θ). Komponentene av strømvektoren i polarkoordinater er henholdsvis:

$$v_r = -\frac{\partial \psi_2}{r\partial \theta} = U\frac{a}{r}$$
$$v_\theta = \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = 0$$

Strømmen er retter radielt utover fra origo $(r = 0)$ og feltet representerer en kilde i origo.

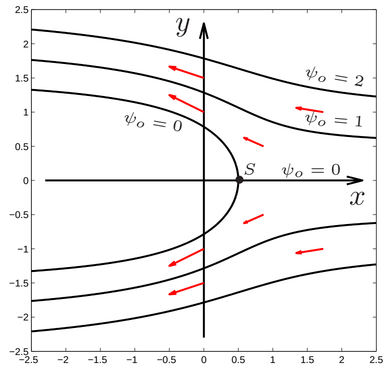
c) To eller flere potensialfelt kan adderes sammen og gi et nytt potensialfelt som er divergens- og virvelfritt.

$$\psi = \psi_1 + \psi_2 = Uy - aU\theta$$

Innfører en $y = r \sin y$ kan en skrive

$$\psi(r, \theta) = U(r \sin \theta) - a\theta$$

Komponentene av strømvektoren i polarkoordinater er



Figur 4: *Skisse av strømlinjer (feltlinjer) for feltet med strømfunksjon ψ (med $U = 10$ (m/s) og $a = 0,5$). Noen strømvektorer i feltet er plottet, med tilpasset lengdeskalering, og stagnasjonspunktet S er markert.*

$$v_r = -\frac{\partial \psi}{\partial r\theta} = U(-\cos\theta + \frac{r}{a}) \tag{1}$$
$$v_\theta = -\frac{\partial \psi}{\partial r} = U \sin\theta \tag{2}$$

d) Strømlinjene for feltet ψ er gitt ved:

$$\psi(r,\theta) = U(r\sin\theta) - a\theta) = \psi_o$$

som gir:

$$r\sin\theta = \frac{\psi_o}{U} + a\theta$$

Strømlinjen $\psi_o = 0$ består av to grener $\theta = 0$ (x-aksen) og kurven

$$r = a\frac{\theta}{\sin\theta}$$

Når $\theta \to 0$ går

$$\frac{\theta}{\sin\theta} \to 0$$

og $r = a$ Dette punktet ($r = a, \theta = 0$) skjærer de to grener av strømlinjene hverandre med rett vinkel. Punktet er markert S på fig. 4.

e) Strømhastigheten i skjæringspunktet S med koordinater ($r = a, \theta = 0$) følger fra likningene (1 - 2). Det gir at komponentene av strømvektoren er $v_r = o$ og $v_\theta = o$. Skjæringspunktet (S) mellom strømlinjene kalles et *stagnasjonspunkt*. Den krumme strømlinjen til venstre for dette punktet kan tenkes å utgjøre overflaten av en fast geometrisk kropp og strømlinjene viser hvordan en innkommende rettlinjet strøm avbøyes forbi kroppen. I fronten av kroppen er strømhastigheten null. Dersom det er friksjonen i fluidet vil det modifisere strømmen i en tynn sone (grensesjiktet) nær overflaten, men utenfor grensesjiktet er strømbildet beregnet her realistisk.

Det er verdt å legge merke til at feltet vist i fig. 4 også kan tolkes som et rettlinjet magnetfelt som avbøyes av feltet fra en elektrisk ladet partikkel (i origo). Dette er nok et eksempel på at felt i hydrodynamikk og elektro-magnetisme i noen tilfelle kan ha tilsvarende form. Denne analogien ble ble av noen forskere (bl.a. Vilhelm Bjerknes, side 181) forsøk utforsket under den tidlige fase av utviklingen av elektro-magnetisk teori. Men det er klart at dette bare er en formell likhet mellom forskjellig felt som ikke uttrykker en dypere fysisk sammenheng.