Løsningforslag til oppgavesett III, "Feltteori og vektoranalyse" (2018/2021), side 206.

av Bjørn Gjevik, 14. april 2021

Oppgave 1.

Gitt en terrengmodell:

$$h(x,y) = h_o + \Delta h \frac{x}{a}\frac{y}{b}$$

a) Dividerer likningen med h_o. Det gir:

$$\frac{h}{h_o} = 1 + \frac{\Delta h}{h_o}\frac{x}{a}\frac{y}{b}$$

Innfører dimensjonsløse størrelser

$$\begin{aligned} h^* &= \frac{h}{h_o} \\ x^* &= \frac{x}{a} \\ y^* &= \frac{y}{b} \end{aligned}$$

Ved innsetning i likningen får en:

$$h^* = \beta(x^*, y^*) = 1 + \alpha x^* y^*$$

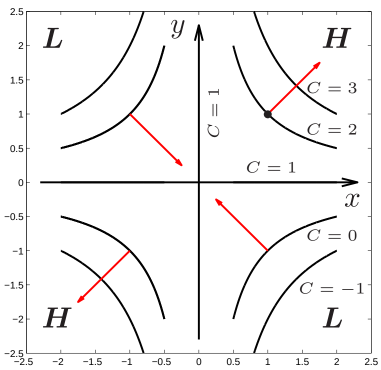
hvor $\alpha = \Delta h / h_o$. Sløyfes * for dimensjonsløse størrelser får en med $\alpha = 1$ den oppgitte likningen. Ekviskalarlinjer er gitt ved

$$\beta(x,y) = 1 + xy = C \quad (konstant)$$

Det gir likningen for ekviskalarlinjene

$$y = \frac{C-1}{x}, \quad x \neq 0$$

b) Figuren viser en skisse av ekviskalarlinjene.



Figur 1: *Skisse av ekviskalarlinjer (høydekoter) for terrengmodellen med konstanter $C = \pm 1, 2, 3$. Gradientvektoren er tegnet inn i punktene $(\pm 1, \pm 1)$ (rød).*

Terrengmodellen beskriver et pass mellom en høyde i første kvadrant og en annen høyde av tilsvarende form i tredje kvadrant.

c) Gradientvektoren er

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\,\boldsymbol{j} = y\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j}$$

Gradientvektoren er tegnet inn for noen punkter i figuren under b).

Gradientvektoren uttrykker hvor mye terrenget stiger eller faller (per lengdeenhet) i retningen normalt ekviskalarlinjene (i.e. høydekotene).

d Et buelementetet langs ekviskalarlinjene kan skrives:

$$d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j}$$

Nå er

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{C-1}{x^2} = -\frac{y}{x}, \quad x \neq 0$$

Følgelig får en

$$\nabla\beta \cdot d\boldsymbol{r} = \big(y\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j}\big) \cdot \big(dx\,\boldsymbol{i} - \frac{y}{x}dx\,\boldsymbol{j}\big) = \big(y\,dx - x\frac{y}{x}\,dx\big) = \big(y - y\big)\,dx = 0$$

Det viser at gradientvektoren står normalt på ekviskalarlinjene.
Tilsvarende bevis kan føres for en vilkårlig ekviskalarlinje gitt ved

$$\beta = y - f(x) = \beta_o$$

hvor $f(x)$ er en vilkårlig deriverbar funksjon av x. Gradientvektoren er da

$$\nabla\beta = \frac{\partial\beta}{\partial x}\,\boldsymbol{i} + \frac{\partial\beta}{\partial y}\,\boldsymbol{j} = -f'(x)\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}$$

hvor

$$\frac{dy}{dx} = f'(x)$$

betegner den deriverte av funksjonen mhp. x. Bueelementet langs ekviskalarlinjen er:

$$d\boldsymbol{r} = dx\,\boldsymbol{i} + dy\,\boldsymbol{j} = dx\,\boldsymbol{i} + f'(x)\,dx\,\boldsymbol{j}$$

Derved får en:

$$\nabla\beta \cdot d\boldsymbol{r} = \big(-f'(x)\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{j}\big) \cdot \big(dx\,\boldsymbol{i} + f'(x)\,dx\,\boldsymbol{j}\big) = \big(-f'(x) + f'(x)\big)\,dx = 0$$

Oppgave 2.

Gitt to vektorfelt i xy-planet:

$$\begin{aligned}\boldsymbol{v}_1 &= -y\,\boldsymbol{i} + x\,\boldsymbol{j}\\ \boldsymbol{v}_2 &= \frac{1}{2}y^2\,\boldsymbol{i} + xy\,\boldsymbol{j}\end{aligned}$$

a) For disse feltene er:

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_1 = \frac{\partial v_{1x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{1y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(-y) + \frac{\partial}{\partial y}(x) = 0$$

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v}_2 = \frac{\partial v_{2x}}{\partial x} + \frac{\partial v_{2y}}{\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}(\frac{1}{2}y^2) + \frac{\partial}{\partial y}(xy) = x$$

$$\nabla\times\boldsymbol{v}_1 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_{1x} & v_{2y} & 0 \end{vmatrix} = (\frac{\partial v_{1y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{1x}}{\partial y})\boldsymbol{k} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(x) + \frac{\partial}{\partial y}(y)\right]\boldsymbol{k} = 2\boldsymbol{k}$$

$$\nabla\times\boldsymbol{v}_2 = (\frac{\partial v_{2y}}{\partial x} - \frac{\partial v_{2x}}{\partial y})\boldsymbol{k} = \left[\frac{\partial}{\partial x}(xy) + \frac{\partial}{\partial y}(\frac{y^2}{2})\right]\boldsymbol{k} = (y-y)\boldsymbol{k} = 0$$

b) For feltet $\boldsymbol{v}_1$ hvor $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 = 0$ eksisterer det en strømfunksjon ψ slik at

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_{1x}, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_{1y}$$

Det gir:

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = y, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = x$$

og ved å integrere de to likningene:

$$\begin{aligned}
\psi(x, y) &= \frac{1}{2} y^2 + f_x(x) \\
\psi(x, y) &= \frac{1}{2} x^2 + f_y(y)
\end{aligned}$$

For å få et entydig uttrykk for $\psi(x, y)$ velges de ubestemte integrasjonsfunksjonene

$$f_x(x) = \frac{1}{2} x^2, \quad f_y(y) = \frac{1}{2} y^2$$

Strømfunksjonen blir:

$$\psi(x, y) = \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2\right)$$

Til dette uttrykket kan en eventuelt legge til en konstant uten at det endrer strømhastigheten. For feltet $\boldsymbol{v}_1$ er $\nabla \times \boldsymbol{v}_1 \neq 0$ eksisterer det ikke noe hastighetspotensiale.

For feltet $\boldsymbol{v}_2$ hvor $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_2 \neq 0$, men $\nabla \times \boldsymbol{v}_2 = 0$ eksisterer det et hastighetspotensiale φ slik at

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = v_{2x}, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = v_{2y}$$

Det gir

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2} y^2, \qquad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = xy$$

og ved integrasjon gir begge likningene samme uttrykk

$$\varphi(x, y) = \frac{1}{2} x y^2$$

Her behøver en altså ikke tilpasse ubestemte integrasjonfunksjoner for å få et entydig uttrykk for φ.

c) Figuren viser en skisse av vektorfeltet $\boldsymbol{v}_1$

d) For feltet $\boldsymbol{v}_2$ er $\nabla \cdot \boldsymbol{v}_2 \neq 0$. Det eksisterer derfor ikke en strømfunksjon, men strømlinjene kan likevel finnes. Et buelement langs strømlinjene skrives

$$d\boldsymbol{r} = dx\, \boldsymbol{i} + dy\, \boldsymbol{j}$$

Siden strømvektoren $\boldsymbol{v}_2$ er tangent til strømlinjene er

$$\boldsymbol{v}_2 \times d\boldsymbol{r} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ v_{2x} & v_{2y} & 0 \\ dx & dy & 0 \end{vmatrix} = \left(v_{2x}\, dy - v_{2y}\, dx\right)\boldsymbol{k} = 0$$

Det gir:

$$v_{2x}\, dy = v_{2y}\, dx$$

Innsatt for v_{2x} og v_{2y}

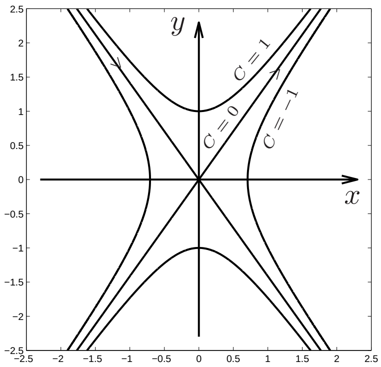
$$\frac{1}{2}y^2\,dy = xy\,dx$$

Forkorter med y, integrerer og får likningen for strømlinjene:

$$y = \pm\sqrt{2x^2 + C}$$

hvor C er en konstant. Dessuten er x-aksen, $y = 0$, en strømlinje.

Med konstanten $C = 0$ får en asymptotene $y = \pm\sqrt{2}\,x$ for strømlinjene som er skisser på figuren.



Figur 2: *Skisse av strømlinjer for konstanten $C = 0$ og $C = \pm 1$.*

Oppgave 3.
Gitt 3-D vektorfelt:

$$\boldsymbol{A} = y\,\boldsymbol{i} - x\,\boldsymbol{j} + yz\,\boldsymbol{k}$$

a) Stokes'sats

$$\int_\sigma \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \oint_\lambda \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r}$$

b) Beregner virvlingen til vektorfeltet:

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} =$$

$$\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} =$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial y}(yz) - \frac{\partial}{\partial z}(-x)\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial}{\partial z}(y) - \frac{\partial}{\partial x}(yz)\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x}(-x) - \frac{\partial}{\partial y}(y)\right)\boldsymbol{k} = z\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{k}$$

i) Beregner sirkulasjonen om en sirkelinje med radius a i xy-planet ved å bruke Stokes' sats. Normalvektor til flaten begrenset av sirkellinjen er $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$

$$C = \oint_\lambda \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\sigma \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\,d\sigma = \int_\sigma (z\,\boldsymbol{i} - 2\,\boldsymbol{k}) \cdot \boldsymbol{k}\,d\sigma = -2\int_\sigma \boldsymbol{k} \cdot \boldsymbol{k}\,d\sigma = -2\pi a^2$$

Oppgave 4.
I et plant polarkordinatsystem (r, θ) er en vektor $\boldsymbol{v}$ gitt ved komponentene (v_r, v_θ):

$$\boldsymbol{v} = v_r \boldsymbol{i}_r + v_\theta \boldsymbol{i}_\theta$$

hvor $\boldsymbol{i}_r, \boldsymbol{i}_\theta$ er enhetvektorer i koordinatretningene. Divergensen til vektoren er gitt ved:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(r v_r) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(v_\theta)$$

a) Det innføres en funksjon $\psi(r, \theta)$ slik at:

$$v_r = -\frac{\partial \psi}{r \partial \theta}, \quad v_\theta = \frac{\partial \psi}{\partial r}$$

Med dette valget er divergensen til vektorfeltet:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}(-r\frac{1}{r}\frac{\partial \psi}{\partial \theta}) + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial \theta}(\frac{\partial \psi}{\partial r}) = -\frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial r \partial \theta} + \frac{1}{r}\frac{\partial^2 \psi}{\partial \theta \partial r} = 0$$

Funksjonen $\psi(r, \theta)$ er derfor en strømfunksjon (feltfunksjon) for vektorfeltet.

Gitt to strømfunksjoner:

$$\psi_1 = A\theta, \quad \psi_2 = B \ln r$$

hvor A og B er konstanter.

b) Strømkomponentene for feltene er henholdsvis:

$$\begin{aligned} v_{1r} &= -\frac{\partial \psi_1}{r \partial \theta} = -\frac{A}{r} \\ v_{1\theta} &= \frac{\partial \psi_1}{\partial r} = 0 \end{aligned}$$

og

$$\begin{aligned} v_{2r} &= -\frac{\partial \psi_2}{r \partial \theta} = 0 \\ v_{2\theta} &= \frac{\partial \psi_2}{\partial r} = \frac{B}{r} \end{aligned}$$

En rask sjekk viser at begge disse feltene er divergensfrie og virvelfrie slik at de er såkalte potensialfelt.

Strømlinjene for det første feltet er

$$\psi_1(\theta) = A\theta = A\theta_o$$

For forskjellige valg av konstanten θ_o blir strømlinjene stråler fra origo. Med $A < 0$ er strømmen rettet utover fra origo (*kilde*) og med $A > 0$ er strømmen rettet innover mot origo (*sluk*). Strømhastigheten avtar som $1/r$ med avstanden fra origo, men volumstrømmen gjennom en sirkel om origo er konstant $2\pi A$ (per lengdeenhet normalt planet).

Strømlinjene for det andre feltet er

$$\psi_2(r) = B \ln r = B \ln r_o$$

For forskjellige valg av konstanten r_o blir strømlinjene sirkler med sentrum i origo. Med $B > 0$ går strømmen i positiv dreieretning (mot klokka) og med $B < 0$ går strømmen i motsatt retning. Strømhastigheten avtar som $1/r$ med avstanden fra origo, men sirkulasjonen langs en sirkel om origo er konstant $2\pi B$. Feltet kalles en *punktvirvel*.

c) Til strømfunksjonene $\psi_1(\theta)$ og $\psi_2(r)$ svarer henholdsvis strømvektorene $\boldsymbol{v}_1$ og $\boldsymbol{v}_2$. Til strømvektoren $\boldsymbol{v}_3 = \boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2$ svarer strømfunksjonen $\psi_3(r,\theta) = \psi_1(\theta) + \psi_2(r)$. Siden vektorfeltene $\boldsymbol{v}_1$ og $\boldsymbol{v}_2$ er divergens og virvelfrie er:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v}_3 = \nabla \cdot (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \nabla \cdot \boldsymbol{v}_1 + \nabla \cdot \boldsymbol{v}_2 = 0$$

og

$$\nabla \times \boldsymbol{v}_3 = \nabla \times (\boldsymbol{v}_1 + \boldsymbol{v}_2) = \nabla \times \boldsymbol{v}_1 + \nabla \times \boldsymbol{v}_2 = 0$$

Det betyr at også vektorfeltet $\boldsymbol{v}_3$ er divergens og virvelfritt i.e. det er et potensialfelt.

d) Strømlinjene for feltet $\boldsymbol{v}_3$ er gitt ved

$$\psi_3(r,\theta) = \theta + \ln r = \psi_o$$

Derav:

$$\ln r = \psi_o - \theta$$

og

$$\exp(\ln r) = \exp(\psi_o - \theta)$$

som kan skrives

$$r = r_o \exp(-\theta)$$

hvor $r_o = \exp(\psi_o)$.Strømlinjene er spiraler slik som vist på figuren.

e) Volumstrømmen gjennom en sirkelflate med sentrum i origo og radius $r = a$ er:

$$Q = \int_o^{2\pi} \boldsymbol{v}_3 \cdot r d\theta \boldsymbol{i}_r = \int_o^{2\pi} v_{3r} r\, d\theta = \int_o^{2\pi} -\frac{A}{r} r\, d\theta = -2\pi A$$

Gjennom en sirkelflate som ikke omfatter origo er volumstrømmen null. Det følger fra Gauss' sats siden feltet er divergensfritt. Det er kilden i origo som gir volumstrømmen.