Løsningforslag til oppgavesett II, "Feltteori og vektoranalyse" (2018/2021), side 205

av Bjørn Gjevik, 27. mars 2021

Oppgave 1.

a) Dersom $\psi = xy^2 - x^2y$ er en strømfunksjon er komponentene av strømvektoren gitt ved:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} = -2xy + x^2$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} = y^2 - 2xy$$

Skal ψ være en strømfunksjon må strømvektoren være divergensfri. Vi finner:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -2y + 2x + 2y - 2x = 0$$

Altså kan ψ brukes som strømfunksjon.

b) Strømlinjene er gitt ved likningen

$$xy^2 - x^2y = \psi_o = konstant$$

Derav:

$$xy^2 - x^2y = \psi_o \tag{1}$$

Strømlinjene $\psi_o = o$ for

i) $x = o$, i.e. y-aksen.
ii) $y = o$, i.e. x-aksen.
iii) Linjen $y = x$

På disse tre linjene er strømkomponentene henholdsvis i) $v_x = o$, $v_y = y^2$, ii) $v_x = x^2$, $v_y = o$ og iii) $v_x = -x^2$, $v_y = -y^2$.

Likningen for strømlinjene $\psi_o \neq o$ og $x \neq 0$ er

$$y = \frac{1}{2}(x \pm \sqrt{x^2 + \frac{4\psi_o}{x}}) \tag{2}$$

Vi kan da skissere feltet (figur 1).

c) Virvlingen til feltet:

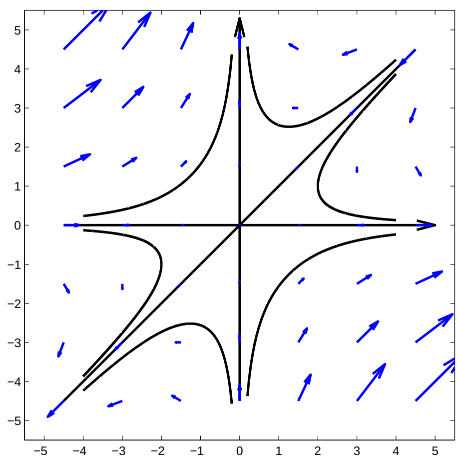
$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) \boldsymbol{k} = 2(x - y)\,\boldsymbol{k} \neq 0$$

bortsett fra på linjen $y = x$ og i origo. Følgelig eksisterer det <u>ikke</u> et hastighetspotensial for dette feltet.

d) Et Laplasisk felt er både divergensfritt og virvelfritt. Divergensfritt felt innebærer:

$$v_x = -\frac{\partial \psi}{\partial y} \tag{3}$$

$$v_y = \frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{4}$$



Figur 1: *Skisse av feltet tilsvarende strømfunksjoen* ψ

Skal virvlingen også være null må

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y} = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0$$

Med Laplace-operatoren

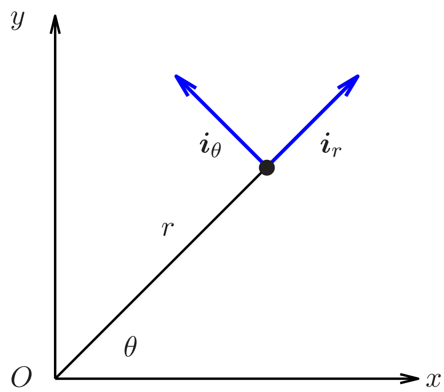
$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

kan kravet på strømfunksjoen i et Laplasisk felt skrives:

$$\nabla^2 \psi = 0$$

Oppgave 2.

a) Innfører polarkoordinater (r, θ):



Figur 2: *Polarkoordinater* (r, θ) *med enhetsvektorer.*

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

Potensialet kan da skrives:

$$\phi(r, \theta) = \frac{Bx}{x^2 + y^2} = \frac{Br\cos\theta}{r^2\sin^2\theta + r^2\cos^2\theta} = \frac{B\cos\theta}{r}$$

Strømvektoren har komponenter $= [v_r, v_\theta]$

$$\boldsymbol{v} = \nabla\phi = \frac{\partial\phi}{\partial r}\boldsymbol{i}_r + \frac{\partial\phi}{r\partial\theta}\boldsymbol{i}_\theta$$

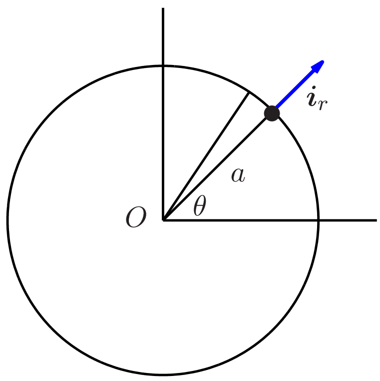
Slik at

$$v_r = \frac{\partial\phi}{\partial r} = -\frac{B\cos\theta}{r^2}$$
$$v_\theta = \frac{\partial\phi}{r\partial\theta} = -\frac{B\sin\theta}{r^2}$$

b) Først noen definisjoner:

Normalvektoren til sirkelen	$\boldsymbol{n}$	$=$	$\boldsymbol{i}_r$
Flateelementet	$d\sigma$	$=$	$ad\theta \cdot 1$
Bueelementet	$d\boldsymbol{r}$	$=$	$ad\theta\boldsymbol{i}_\theta$

Faktoren 1 i uttrykket flatelementet står for en lengdeenhet langs sylinderflaten.



Figur 3: *Sylinderflate med radius a med enhetsvektorer.*

Fluks av strømvektoren gjennom sylinderflaten (per lengdeenhet)

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma = \int_0^{2\pi} v_r\boldsymbol{i}_r\cdot\boldsymbol{i}_r\,ad\theta = -\frac{B}{a}\int_0^{2\pi}\cos\theta\,ad\theta = 0$$

Sirkulasjonen av strømvektoren langs sirkellinjen $r = a$

$$C = \oint \boldsymbol{v}\cdot d\boldsymbol{r} = \int_0^{2\pi} v_\theta\boldsymbol{i}_\theta\cdot\boldsymbol{i}_\theta\,ad\theta = -\frac{B}{a}\int_0^{2\pi}\sin\theta\,ad\theta = 0$$

c) Vi vet at dipolfeltet er divergens og virvelfritt i.e.

$$\nabla\cdot\boldsymbol{v} = 0, \quad \nabla\times\boldsymbol{v} = 0$$

Fra Gauss' sats følger at vektorfluksen:

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{v}\cdot\boldsymbol{n}d\sigma = \int_\tau \nabla\cdot\boldsymbol{v}\,d\sigma = 0$$

hvor det integreres over en vilkårlig lukket flate σ som omslutter volumet τ, origo untatt.

Fra Green's sats følger at sirkulasjonen

$$C = \oint_\lambda \boldsymbol{v} \cdot \boldsymbol{d}r = \int_\sigma \nabla \times \boldsymbol{v} \, d\sigma = 0$$

om begrensingskurven λ som avgrenser flaten σ. Der må også origo holdes utenfor fordi $\nabla \times \boldsymbol{v}$ er uendelig (udefinert) i origo.

Oppgave 3.
Gitt $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \nabla\psi$ hvor $\psi = \psi(x, y)$.

$$\boldsymbol{v} = \boldsymbol{k} \times \left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{j} \right)$$

Nå er $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{i} = \boldsymbol{j}$ og $\boldsymbol{k} \times \boldsymbol{j} = -\boldsymbol{i}$. Det gir

$$\boldsymbol{v} = \frac{\partial\psi}{\partial x}\boldsymbol{j} - \frac{\partial\psi}{\partial y}\boldsymbol{i}$$

Divergensen til feltet er

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial\psi}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial\psi}{\partial x}\right) = 0$$

Virvlingen til feltet

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ -\frac{\partial\psi}{\partial y} & \frac{\partial\psi}{\partial x} & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2\psi}{\partial^2 x} + \frac{\partial^2\psi}{\partial^2 y} \right) \boldsymbol{k} = \nabla^2\psi \, \boldsymbol{k}$$

Oppgave 4.

a) Gauss's sats:

$$\int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, d\tau = \int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma$$

Velger en kuleflaten med radius r og overflate $\sigma = O$ og setter volumet av kulen $\tau = V$. Divergensen til vektoren $\boldsymbol{F}$ er

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = 3$$

Volumintegralet på venstre side i Gauss' sats:

$$\int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{F} \, d\tau = 3 \int_\tau d\tau = 3V$$

Innfører kulekoordinater r, φ, θ: $\boldsymbol{F} = r\boldsymbol{i}_r$ med normalvektoren på kuleflaten $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{i}_r$. Flateintegralet på høyre side i Gauss' sats:

$$\int_\sigma \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, d\sigma = \int_\sigma r\boldsymbol{i}_r \cdot \boldsymbol{i}_r \, d\sigma = r \int_\sigma d\sigma = rO$$

Altså har vi fra Gauss' sats:

$$3V = rO \quad i.e. \;\; V = \frac{r}{3}O$$

b) Arealet av kuleflate regnes ut på følgende måte. Finner først uttrykket for arealet av et flateelement på kuleflaten i kulekoordinater:

$$d\sigma = r\sin\theta d\varphi \cdot r d\theta = r^2 \sin\theta \, d\varphi d\theta$$

Arealet av hele kuleflaten

$$O = \int_\sigma d\sigma = \int_0^\pi \int_0^{2\pi} r^2 \sin\theta \, d\varphi \, d\theta = 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin\theta \, d\theta = 4\pi r^2$$

Slik at volumet av kulen er

$$V = \frac{r}{3} O = \frac{4}{3}\pi r^3$$

Oppgave 5.

a) Velger enheter for fasefunksjonen ψ = radianer (rad) Velger enheter for x, y, t:

x	meter	(m)
y	meter	(m)
t	sekund	(s)

Da er enheten for $kx = rad$ og for bølgetallet $k = rad/x$ i.e. rad/m. Tilsvarende for bølgetallet i y-retning, l.

Enheten for vinkelhastigheten ω følger fra $\omega t = rad$, i.e. ω har enhet rad/s.

b) Velger $t = 0 \Longrightarrow \psi = kx + ly = \psi_o$ = konstant. Konturlinjer (ekviskalarlinjer) er rette linjer. Uttrykkene for noen forskjellige valg av konstanten ψ_o er:

ψ_o	konturlinje
o	$y = -\frac{k}{l}\, x$
$\frac{\pi}{2}$	$y = -\frac{k}{l}\, x + \frac{\pi}{2l}$
π	$y = -\frac{k}{l}\, x + \frac{\pi}{l}$
$\frac{3\pi}{2}$	$y = -\frac{k}{l}\, x + \frac{3\pi}{2l}$
2π	$y = -\frac{k}{l}\, x + \frac{2\pi}{l}$

For skisse i figur 5 velges $k = l$.

c) Avstanden mellom to faselinjer hvor differansen i fasefunksjonen er 2π tilsvarerer en bølgelengde λ (fig. 4). For trykkfeltet er det en bølgetopper for $\psi_o = \frac{\pi}{2}$ og $\psi_o = \frac{5\pi}{2}$ (5). Fra figuren 4 ser vi at

$$\sin\alpha = \lambda / \frac{2\pi}{k}$$

og

$$\tan\alpha = \frac{k}{l}$$

Siden

$$\sin\alpha = \frac{\tan\alpha}{\sqrt{1 + \tan^2\alpha}} = \frac{\lambda}{\frac{2\pi}{k}}$$

får en at bølgelengden

$$\lambda = \frac{2\pi}{\sqrt{k^2 + l^2}}$$

Ved tidspunktet $t = \pi/2\omega$ er ligningen for konturlinjen $\psi_o = 0$

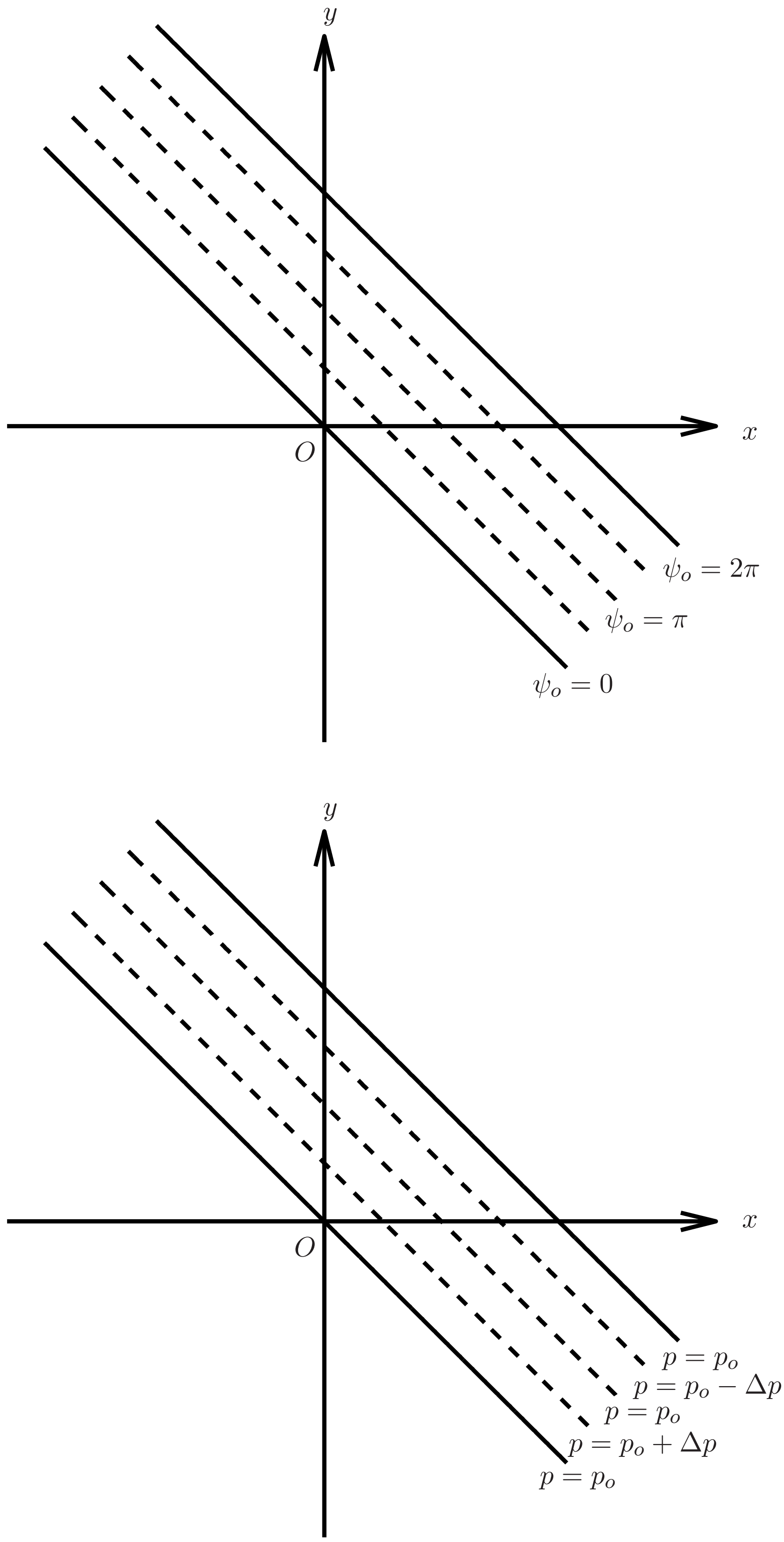
$$y = -\frac{k}{l}x + \frac{\pi}{2l}$$

Det betyr at konturlinjen $\psi_o = 0$ i figur 5 har fyttet seg en distanse $\frac{\lambda}{4}$ i tidsrommet $t = \frac{\pi}{2\omega}$. Farten (fasehastigheten) som konturlinjen har flyttet seg med er

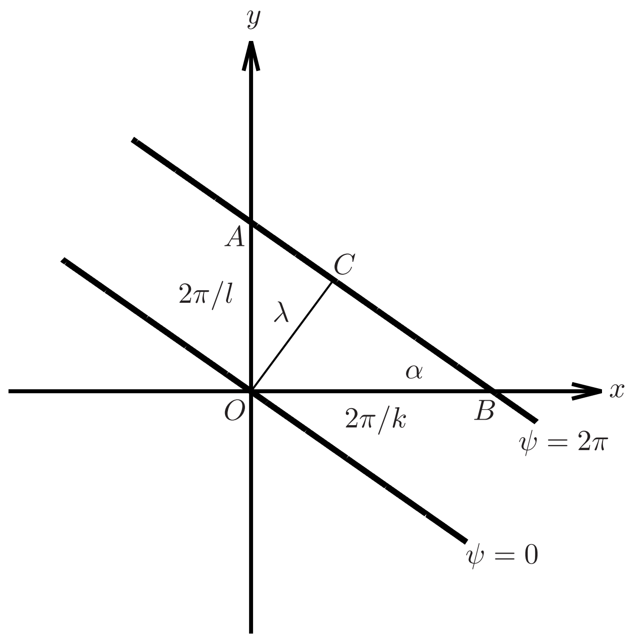
$$c = \frac{\frac{\lambda}{4}}{\frac{\pi}{2\omega}} = \frac{\lambda}{\frac{2\pi}{\omega}} = \frac{\lambda}{T}$$

hvor $T = \frac{2\pi}{\omega}$ er *bølgeperioden*. Hastigheten c kalles *fasehastigheten* for bølgen. Forflytningen av faselinjene i bølgefeltet skjer i retning av normalen til faselinjene i.e.

$$\nabla\psi = k\boldsymbol{i} + l\boldsymbol{j}$$



Figur 4: *Konturlinjer for fasefunksjonen ψ og lydtrykket p for $k = l$.*



Figur 5: *Faselinjer, ($\psi = 0, 2\pi$) , bølgelengde, $\lambda = OC$ og bølgetall, k, l. Avstanden mellom faselinjene langs x og y aksene er $OA = \frac{2\pi}{l}$ og $OB = \frac{2\pi}{k}$.*