Løsningforslag til oppgavesett I, "Feltteori og vektoranalyse" (2018/2021), side 203.

av Bjørn Gjevik, 8. april 2021

Oppgave 1.
Gitt 3-D vektorfelt:

$$\boldsymbol{A} = (x-y)\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - \frac{1}{2}z^2\boldsymbol{k}$$

a) Divergensen til feltet

$$\nabla \cdot \boldsymbol{A} = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = 1 + z - z = 1$$

b) Virvlingen (curl) til feltet:

$$\nabla \times \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ A_x & A_y & A_z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = -y\,\boldsymbol{i} + \boldsymbol{k}$$

c) Vektorfluks gjennom en lukket flate σ med flatenormal $\boldsymbol{n}$ som begrenser et volum τ:

$$Q = \int_\sigma \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{n}\, d\sigma = \int_\tau \nabla \cdot \boldsymbol{A}\, d\tau = \int_\tau 1\, d\tau = \tau$$

hvor vi har brukt Gauss' sats (divergensteoremet).

d) Sirkulasjonen om en lukket kurve λ i xz-planet som begrenser en flate med flatenormal $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{j}$ og areal σ:

$$C = \oint_\lambda \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{r} = \int_\sigma \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot d\boldsymbol{\sigma} = \int_\sigma \nabla \times \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{j}\, d\sigma = \int_\sigma 0\, d\sigma = 0$$

hvor vi har brukt Stokes' sats.

Oppgave 2.
Gitt 2-D vektorfelt:

$$\boldsymbol{v} = -Bx\boldsymbol{i} + By\boldsymbol{j}$$

a) Det eksisterer et hastighetspotensiale dersom $\nabla \times \boldsymbol{v} = 0$ og en strømfunksjon dersom $\nabla \cdot \boldsymbol{v} = 0$. Vi finner:

$$\nabla \cdot \boldsymbol{v} = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} = -B + B = 0$$

og

$$\nabla \times \boldsymbol{v} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & 0 \\ v_x & v_y & 0 \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} - \frac{\partial v_x}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} = 0$$

Altså eksisterer det både en strømfunksjon ψ og et hastighetspotensiale ϕ for feltet.

b) Siden $\boldsymbol{v} = \nabla\phi$ har vi at

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = v_x, \quad \frac{\partial \phi}{\partial y} = v_y$$

Integrasjon av disse to likningene gir:

$$\phi(x,y) = -\frac{1}{2}Bx^2 + f_x(y), \quad \phi(x,y) = \frac{1}{2}By^2 + f_y(x)$$

For å få et entydig uttrykk for funksjonen $\phi(x,y)$ velges de ubestemte funksjonene

$$f_x(y) = \frac{1}{2}By^2, \quad f_y(x) = -\frac{1}{2}Bx^2$$

Potensialfunksjonen blir følgelig

$$\phi(x,y) = \frac{B}{2}\left(-x^2 + y^2\right)$$

Til dette uttrykket kan det adderes en konstant uten at det endrer vektorfeltet. Kontroller resultatet ved å beregne strømkomponentene !

c) Strømfunksjonen ψ er definert ved

$$-\frac{\partial \psi}{\partial y} = v_x, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = v_y$$

Det gir

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} = Bx, \qquad \frac{\partial \psi}{\partial x} = By$$

Finner ψ ved å integrere likningene:

$$\psi(x,y) = Bxy, \qquad \psi(x,y) = Bxy$$

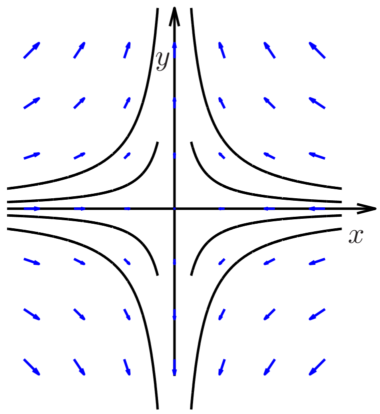
Her får en altså en entydig funksjon $\psi(x,y)$ uten å gjøre en tilpassing ved ubestemte integralfunksjoner slik som i b). Strømfunksjonen har altså formen:

$$\psi(x,y) = Bxy$$

Strømlinjene er gitt ved $\psi(x,y) = \psi_o$ i.e.

$$y = \frac{k}{x}, \quad x \neq 0$$

hvor konstanten $k = \psi_o/B$.



Figur 1: *Skisse av strømlinjer for konstanten $k=1$ og $k=2$. For strømvektorer er valgt skalering $B = 0,1$*

Oppgave 3.

Gitt Bernoullis likning:

$$\frac{p}{\rho} + \frac{1}{2}\boldsymbol{v}^2 + gz = B_o$$

a) Størrelsene som inngår i likningen med enheter:

Størrelse	Symbol	SI-enhet
Trykk	p	$N/m^2 = Pa$ (Pascal)
Tetthet	ρ	kg/m^3
Strømhastighet	$\boldsymbol{v}$	m/s
Tyngdeakselerasjon	g	m/s^2
Høyde over et referansenivå	z	m
Bernoulli-konstanten	B_o	m^2/s^2

Alle ledd i likningen har samme dimensjon med enhet (m^2/s^2) så likningen er dimensjonsmessig korrekt. Bernoullis likning i denne formen kan brukes langs en strømlinje for stasjonær (tiduavhengig) strøm av en inkomprssibel væske (ρ konstant).

b) Konstant volumstrøm gjennom røret:

$$V\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2 = V_B\pi\left(\frac{d}{2}\right)^2$$

Det gir

$$V_B = \left(\frac{D}{d}\right)^2 V$$

c) Bruker Bernoullis likning langs en strømlinje i sentrum av røret ($z = 0$) fra A til B:

$$\frac{p_A}{\rho} + \frac{1}{2}V^2 = \frac{p_o}{\rho} + \frac{1}{2}V_B^2$$

hvor p_o er lufttrykket ved utløpet (B). Det gir trykket ved stemplet (A):

$$p_A = p_o + \frac{\rho}{2}(V_B^2 - V^2) = p_o + \frac{\rho}{2}V^2\left[\left(\frac{D}{d}\right)^4 - 1\right]$$

hvor V_B er ellimenert ved hjelp av uttrykket i b).

d) Kraften som må til for å bevege stemplet:

$$F = p_A\pi\left(\frac{D}{2}\right)^2$$

Oppgave 4.

Strømprofilen mellom planene er

$$\boldsymbol{v}(y) = U_o\left[1 - \left(\frac{2y}{h}\right)^2\right]\boldsymbol{i}$$

a) Volumstrømmen, per lengdeenhet normalt xy-planet:

$$Q = \int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}} v(y)\,dy = U_o\int_{-\frac{h}{2}}^{\frac{h}{2}}\left[1 - \frac{4}{h^2}y^2\right] = \frac{2}{3}U_o h$$

b) Varmeledningslikningen (11.6) i y-retning ved; stasjonære forhold ($\frac{\partial}{\partial t} = 0$), ingen varmekilder i væsken, ingen strøm i y-retningen ($v_y = 0$), temperaturen bare funksjon av y ($T(y)$):

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} = 0$$

Løsning av likningen er $T(y) = Ay + B$ hvor integrasjonskonstantene A og B bestemmes ved grenseflatebetingelsene ved planene:

$$\begin{aligned} y &= \frac{h}{2}, \quad T = T_2 \\ y &= -\frac{h}{2}, \quad T = T_1 \end{aligned}$$

Det gir to likninger til å bestemme integrasjonskonstantene:

$$\begin{aligned} T_2 &= \quad A\tfrac{h}{2} + B \\ T_1 &= -A\tfrac{h}{2} + B \end{aligned}$$

Temperaturprofilen blir:

$$T(y) = (T_2 - T_1)\frac{y}{h} + \frac{T_2 + T_1}{2}$$

Innfører temperaturgradienten

$$\beta = \frac{T_1 - T_2}{h}$$

og middeltemperaturen

$$T_m = \frac{T_2 + T_1}{2}$$

slik at temperaturprofilen kan skrives

$$T(y) = -\beta y + T_m$$

c) Varmestrømmen i y-retning gjennom en flate σ normalt y-aksen skjer ved ledning (ingen strømkomponent). Varmetransport ved ledning (per flateenhet) er:

$$\boldsymbol{H}_l = -k\nabla T$$

Varmeledningstallet k har SI-enhet W/mK. Varmestrømmen i y-retning:

$$Q_y = -k\frac{\partial T}{\partial y}\sigma = k\beta\sigma$$

d) Konvektiv varmetransport i x - retning (per flateenhet):

$$H_s = \rho c(T - T_o)v(y)$$

med SI enhet W/m^2.

Siden det er forutsatt å ikke være temperaturgradienter i x - retning bidrar ikke varmeledningen til vametransporten. Den konvektive varmetransporten gjennom en snittflate normalt x-aksen (per lengdeenhet normalt xy-planet):

$$\begin{aligned}
Q_x &= \int_{-h/2}^{h/2} H_s\, dy = \int_{-h/2}^{h/2} \rho c(T - T_o)v(y)\, dy \\
&= \rho c U_o \int_{-h/2}^{h/2} \big(-\beta y + T_m - T_o\big) \left[1 - (\frac{2y}{h})^2\right] dy \\
&= \frac{2}{3}\rho c U_o (T - T_o) h
\end{aligned}$$

Enheten for siste leddet i uttrykket for Q_x er

$$\frac{kg}{m^3}\frac{J}{kg\,K}\frac{m}{s}K\,m = \frac{W}{m}$$

Det viser at beregningene er dimensjonsmessig korrekte. En slik dimensjonssjekk på beregninger er et nyttig hjelpemiddel til å oppdage eventuelle regnefeil !